

# Matemaatikast meid ümbritsevates tehnoloogiates

*Andi Kivinukk*

Tallinna Ülikooli matemaatika osakond

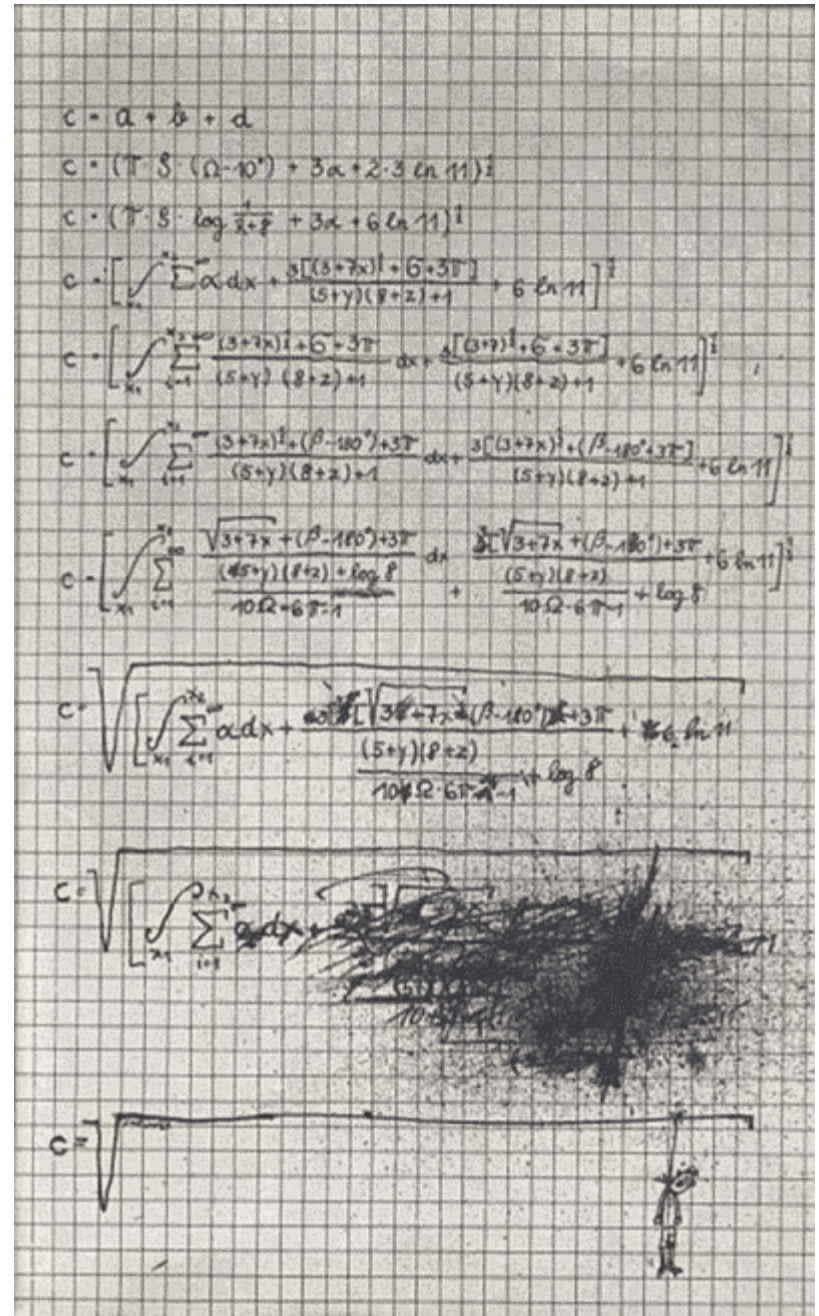
**Ettekanne Tallinna Ülikooli DTI6001.DT BA-  
üliõpilastele**

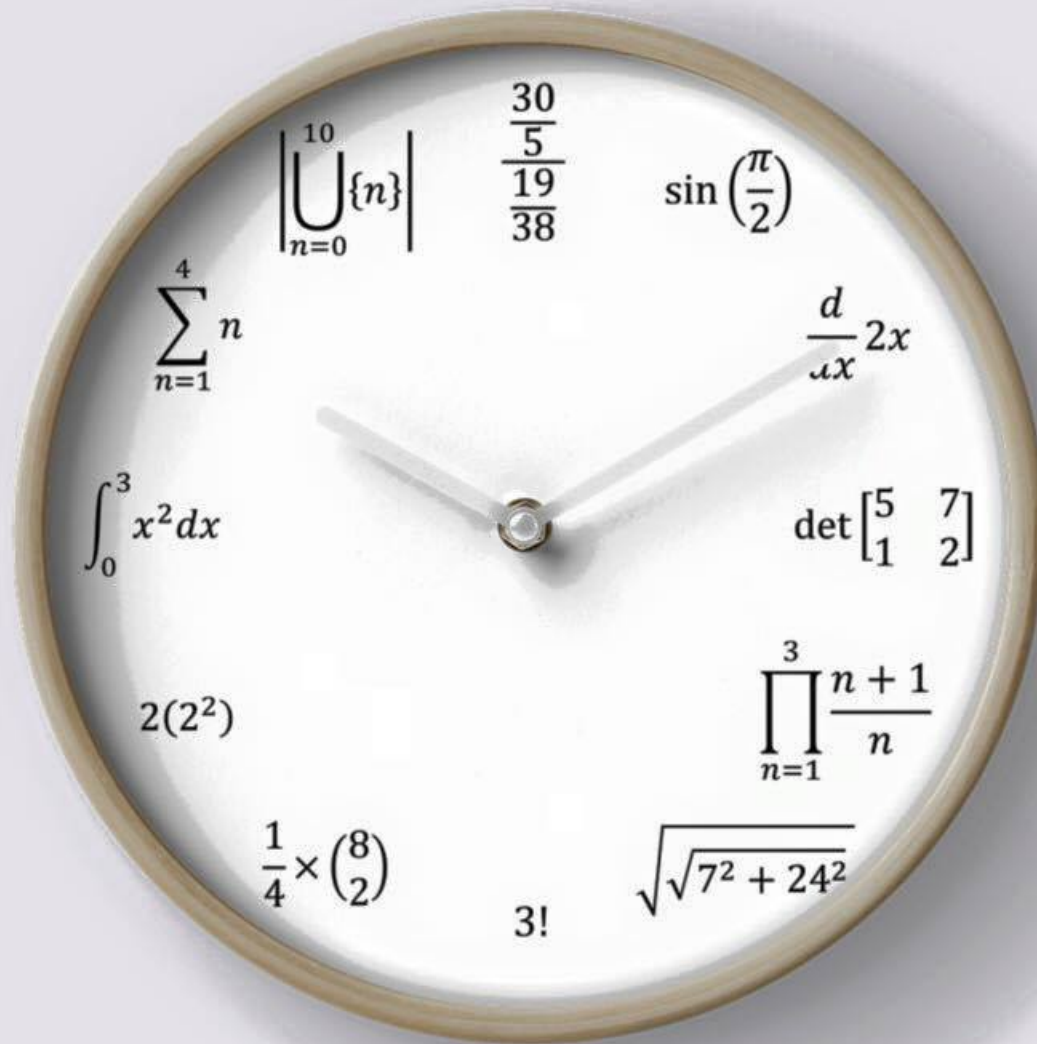
Narva mnt 29, A543, 16. november 2018

# Teemad

- Miks on matemaatika tähtis ? Mida saaks rääkida koolilastele või „inimestele trammis“ ?
- Matemaatika tänapäeva ühiskonnas
- Matemaatikast (tehnoloogiates) meie ümber
- Matemaatika aitab ennustada
- Vihjeid allikatele

- Mis on matemaatika ?
- Kas halvad hinded ja stress ?





$$\left| \bigcup_{n=0}^{10} \{n\} \right|$$

$$\frac{30}{\frac{5}{19} \frac{38}}{}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^4 n$$

$$\frac{d}{dx} 2x$$

$$\int_0^3 x^2 dx$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2(2^2)$$

$$\prod_{n=1}^3 \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{1}{4} \times \binom{8}{2}$$

$$3!$$

$$\sqrt{\sqrt{7^2 + 24^2}}$$

# Igapäevaelus matemaatikaga halvasti ?

- Sunday Review (The New York Times eriväljaanne), 27.02. 2016 ühest uurimusest:

82% täiskasvanud ameeriklastest ei oska etteantud mõõtmetega vaiba hinda arvutada, kui on teada vaiba ruutmeetri hind.

- Näide:  $1 \text{ m}^2$  maksab \$ 89.- , kui palju maksab vaip laiusel 1.4 m ja pikkusel 3.7 m ?
- Antud ettekandes me ei vaata aritmeetika, st liitmise-lahutamise, korrutamise-jagamise igapäevaelu ülesandeid.

# Mis on matemaatika ?

„Matemaatika on üks keel,“ ütles  
Josiah Willard Gibbs (1839-1903, USA  
füüsik, mehaanik, matemaatik;  
termodünaamika ja statistilise mehaanika  
alusepanija).



# Mis on matemaatika (järg) ?

- Matemaatika on universaalne keel, seda ei pea tõlkima.
- Ei ole ühtset definitsiooni, sageli öeldakse, et on teadus kvantitatiivsetest ja ruumilistest suhetest.
- Igal juhul on matemaatika ühemõtteliselt täpne, süstemaatiline ja loogiline süsteem.
- Vahel mõeldakse, et kas on teadus või isegi kunst ?

# Matemaatika olemus

- Kui matemaatika oleks ülesannete lahendamine, siis kõik muutuks aina keerulisemaks
- Õnneks suure hulga faktide kogunemisel toimub **struktuuride** (mustrite) **loomine** (lahendati ruut-, kuup- jne edasi võrrandeid, kuni leiti üldine teooria)
- Matemaatika **terviklikkus** (algebra, geomeetria, matemaatiline analüüs jne – kõik omavahel läbi põimunud)
- **Ilu** printsiip (ilus säilib :  $a^2 + b^2 = c^2$  )
- **Matemaatiline modelleerimine** on tähtis (ja kasulik)
- Konkreetne matemaatik ei mõtle kasutoomisele, kuid tervikuna on **matemaatika suure kasuteguriga** (vaja ainult pliiatsit/paberit/arvutit)



See on ilus !

$e^{i\pi} = -1$ , kui  $e = 2.718 \dots$  ja  $i = \sqrt{-1}$



# Matemaatika ja ühiskond

- Matemaatika **mõju** ühiskonnale (ja vastupidi) toimub selle rakenduste kaudu, mis tänapäeval baseeruvad **oluliselt arvutitel**
- **John von Neumann** (1903 - 1957), USA arvuti väljatöötamise rühma juht, mänguteooria alusepanija, moodsa arvutamise isa.
- **Allan Turing** (1912 – 1954), loogik, juhtis II ilmasõja ajal Saksa koodimasinate lahtimuukimist; film „*The Imitation Game*“ (2014) -> Benedict Cumberbatch;

# Matemaatika ja ühiskond (järg)

- R. Flood, R. Wilson, Kuulsad matemaatikud, 2011 (eesti k 2014) -> vt von Neumann ja Turing
- **Nobeli majanduspreemiat**  
(rääkimata füüsikast/keemiast, ka meditsiinist)  
saab valdavalt ainult **matemaatika** rakendustega seotud tööde eest.
- **Nobeli majanduspreemia 2018:** Paul Romer (sünd 1955, mh B.S. matemaatikas) tehnoloogia innovatsiooni sisseviimise eest makromajanduse pikaajalistesse mudelitesse.
- Romer, 2015, võttis kasutusele termini *matelik* (ing k *matheniss*), mis tähendab matemaatika väärt- või kuritarvitamist majandusteadustes. Matemaatika peab arutelusid korrastama, mitte hägustama !

# 100 Scientific Discoveries that changed the World.

National Geographic, 2012 (eesti k 2013)

- WWW(World Wide Web),1990 = brauserid ja lk-d, eksisteerib tänu Internetile
- Personaalarvuti, 1977
- Internet, 1968 (ARPANET 1962 USA armees)
- Informatsiooniteooria, 1948, Claude Shannon (1916 - 2001)
- Boole'i arvutus, 1854, George Boole (1815 - 1864)
- Arvusüsteemid (kahendarvud, 1697, G.W.Leibniz (1646 - 1716)) , nt  $23 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$  , aga

$$23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10111$$

# Digipildindus

(kõik on kasutanud digikaameraid või saatnud JPG formaadis pilte):

iga pilt koosneb kahe muutuja funktsiooni väärtustest, milledega tuleb teha „kavalaid” teisendusi, et need väärtused pakkida (*lossy compression*) internetti ja siis meie kodus jälle pildiks lahti pakkida.

NB! Maatriksarvutus on siin tähtis.

Pilt ca 83 tuh baiti (1 bait on digitaalse info ühik, nt  
(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1))



Pilt ca 1500 bairi



# MP3 (ja uuemad versioonid) mängijad

Digitaalne meedia vahend (info salvestatud kadudega (*lossy compression*) digitaalselt).

MP3-süsteemi matemaatiline väljatöötamine algas ca 30 a. tagasi, baseerub täiesti uut tüüpi funktsioonidel, siinuste-koosinuste „sugulased”, ja mis võimaldavad hääle digitaalset teisendamist (*audio coding*) 12-15 korda kiiremini võrreldes varasemate meetoditega.





**Sony Walkman S-seeria mängija**

## MP3 mängijad (järg)

- Modifitseeritud diskreetne koosinusteisendus (MDCT)

$$X_k = \sum_{n=0}^{2N-1} x_n \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( n + \frac{N+1}{2} \right) \left( k + \frac{1}{2} \right) \right]$$

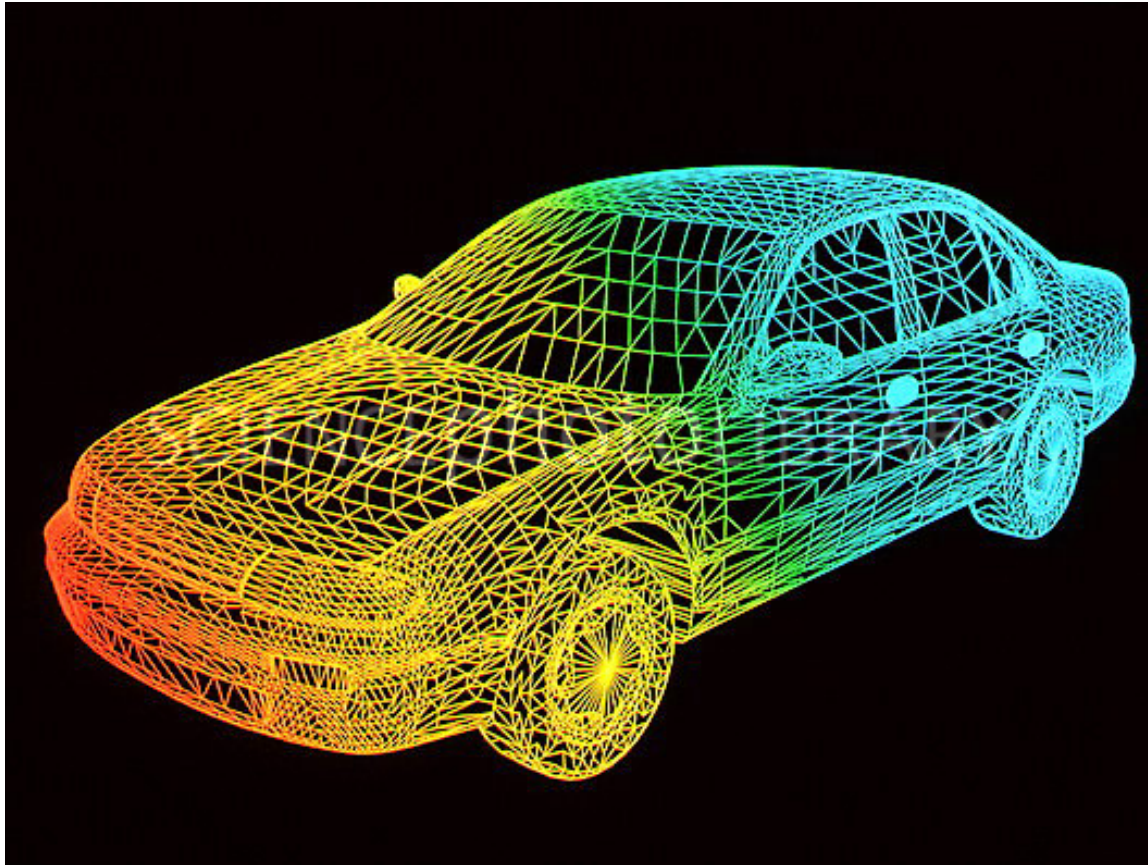
kodeerib infot (näiteks hääle sagedust) kujul  
 $(x_0, \dots, x_{2N-1}) \rightarrow (X_0, \dots, X_{N-1})$

## **CAD** (*Computer Aided Design*) (ca 1950)

autotööstuses kirjeldab auto kuju ja see esitatakse kohe ka arvutiekraanil matemaatiliste funktsioonidega - need on **ruut- ja kuuppolünoomide** „kokkuliimitud sugulased” .

Eeldab nn mitmeharuliste funktsioonidega ( $F(x) = f(x)$ , kui  $a < x < b$  ja  $F(x) = g(x)$ , kui  $b < x < c$ ) tutvumist. Lihtsaim näide on murdjoon.

Vektorgraafika (punkt, sirge, joon, hulknurk) !



**Auto kere kujutis arvutiekraanil traatvõrena**

## GPS (*Global Positioning System*) 1978

mis kasutab asjaolu, et kui meie kaugused nelja satelliidini on teada, siis saame üheselt määrata oma asukoha kolm koordinaati.

Olemuselt trigonomeetria, tegelikult mittetriviaalne ülesanne, sest satelliidid liiguvad.

Kui rohkem satelliite nähtaval (GPS-s tiirleb neid kokku 24), siis kasutatakse vähimruutude meetodit.



**GPS-i satelliit**

# Arvutitomograafia

Kui kehast lasta läbi röntgenikiir, siis olenevalt keha omadustest see neeldub, seda mõõdetakse ja tulemused liidetakse, mis viib teatud (*Radoni*) integraalideni. Tehnika eest on saadud Nobeli meditsiinipreemia, A. M. Cormack 1979

NB! Integraali tutvustamine pindala ja summade abil on õpetlikum, kui formaalne definitsioon



**Komputertomograaf**



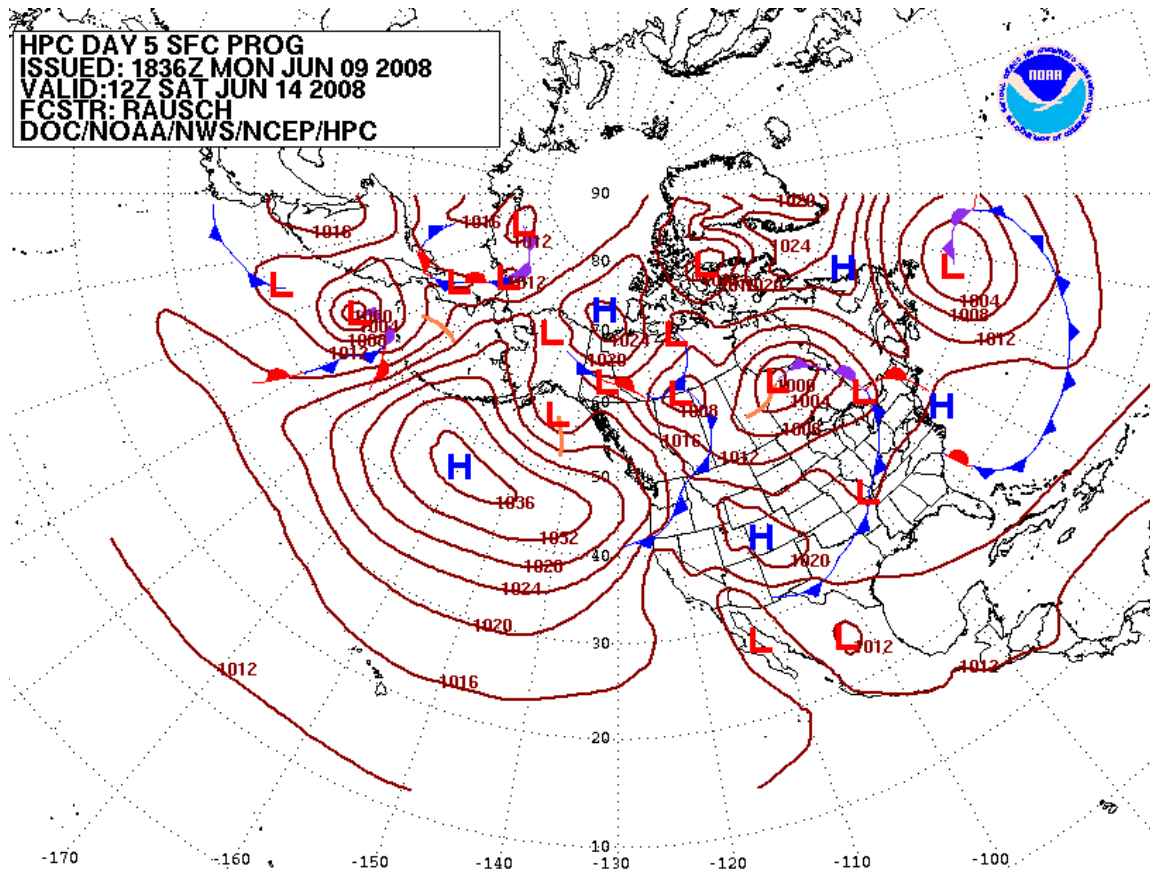
# Ilmaennustamine (vt nt ETV-s ilmakaarti, kus pilved ja isobaarid liiguvad)

Need ei ole aerofotod !

Kogutakse andmeid vaatlusjaamadest ja satelliitidelt.

Andmed korrastatakse arvutite tarbeks ja  
koostatakse 6 mittelineaarset  
diferentsiaalvõrrandit, kus 6 argumenti.

Kiired numbrilised algoritmid võimaldavad neid  
võrrandeid (õigeaegselt) lahendada.



## Periodi 9.-14. juuni 2008 isobaarid

Tinglik normaalarõhk 760 mm Hg = 1013 hPa, mm Hg on kasutusel seinabaromeetrites.

# Teadete salastamine (krüptograafia)

- Internetiajastul (al 1970) algas suuremahuline infovahetus, mida osaliselt (pangad, armeed, firmad) oli vaja salastada
- Uus sügavalt matemaatiline idee: avaliku võtmega kodeerimine (**RSA** – R. Rivest, A. Shamir, L. Adelman (MIT) ).
- Kodeerimine toimub suurte, juhuslikult genereeritud algarvude korrutamisel,  $p * q = N$ , kuid dekodeerimine  $N$  teguriteks lahutamisel.

Näide:  $56942507 = ? * ?$

## Triipkood (*barcode*),

- 1949 ühes Philadelphia toidupoes, 1960-d Ameerika Raudtee Assotsiatsioon
- Praegu laialdaselt kasutusel EAN-13 triipkood (European Article Number, nüüd International Article Number )

Eelmise slaidi vastus:  $56942507 = 7901 * 7207$

# EAN2 kood

(numbrite 0 – 9 neljateistkohalised koodid)

0 0001101 0100111

5 0110001 0111001

1 0011001 0110011

6 0101111 0000101

2 0010011 0011011

7 0111011 0010001

3 0111101 0100001

8 0110111 0001001

4 0100011 0011101

9 0001011 0010111

ISSN 0317-8471



770317847001

EAN-2 koodis triipkood

# Matemaatika aitab ennustada

## Matemaatiline modelleerimine

*Lineaarse nõudlus- ja pakkumisfunktsiooniga turu dünaamika*

Ajamomentidel  $n = 0, 1, 2, \dots$  olgu turul kauba hind vastavalt  $p_n$  ja kaupa nõutakse kogus  $D_n$  ning pakutakse  $S_{n+1}$  (see tähendab, et pakkumine päeval  $n + 1$  oleneb eelmise päeva hinnast  $p_n$ )

Võrranditega:

$$D_n = a - b p_n; \quad S_{n+1} = c + d p_n$$

Turu tasakaal tähendab:  $S_{n+1} = D_{n+1} \quad c + d p_n = a - b p_{n+1}$

Saame:

$$p_{n+1} = A p_n + B \quad (*)$$

( $A = -d/b < 0$ ,  $d$  – tootmise kiirus (intensiivsus),  $b$  – tarbimise kiirus;  $B = (a - c)/b > 0$ )

Näide 1.  $p_{n+1} = -0.5 p_n + 2$

Arvutame:

olgu  $p_0 = 1.5$ ,

siis  $p_1 = 1.25$ ,  $p_2 = 1.375$ ,  $p_3 = 1.3125$ ,  $p_4 = 1.34375$ ,

$p_5 = 1.328125$ , ...

Hind tundub stabiliseeruvat, aga milliseks väärtuseks? Oletame, et piirväärtuseks on  $p^* = ?$

Saame  $p^* = -0.5p^* + 2$  ehk  $p^* = 2/1.5 = 1.333...$



$$\text{Näide 2. } p_{n+1} = -1.5 p_n + 2$$

Arvutame:

$$\text{olgu } p_0 = 1.5,$$

$$\text{siis } p_1 = -0.25, p_2 = 2.375, p_3 = -1.5625, p_4 = 4.34375, p_5 = -4.515625, \dots$$

Midagi enneolematut ? Mõned hinnad negatiivsed  
???

# Näide mittelineaarsest dünaamilisest süsteemist

Nõudmine:  $D_n = 3 - 2p_n$ ; Pakkumine:  $S_{n+1} = p_n^2 + 1$

Turu tasakaal :  $S_{n+1} = D_{n+1}$  ehk  $p_n^2 + 1 = 3 - 2p_{n+1}$ ,  
millest

$$p_{n+1} = 1 - p_n^2 / 2 \quad (**)$$

Seda analüütiliselt lahendada ei saa, aga arvutada saab (4 kohta peale koma).

Olgu  $p_0 = 1.0$ , siis  $p_1 = 0.5$ ,  $p_2 = 0.875$ ,  $p_3 = 0.6172$ ,  
 $p_4 = 0.8095$ ,  $p_5 = 0.6724$ ,  $p_6 = 0.7739$ ,  $p_7 = 0.7005$ ,  
 $p_8 = 0.7546$ ,  $p_9 = 0.7153...$

Vist stabiliseerub kuskile ? Geomeetriliselt “ämblikuvõrgu” meetod !

[http://en.wikipedia.org/wiki/Cobweb\\_plot](http://en.wikipedia.org/wiki/Cobweb_plot)

Vaatame !

Seal võrrand  $p_{n+1} = 3 (p_n - p_n^2)$  ja  $p_0 = 0.08$ ,  
 $p_1 = 0.22$ ,  $p_2 = 0.516$  jne.

Teisel joonisel on

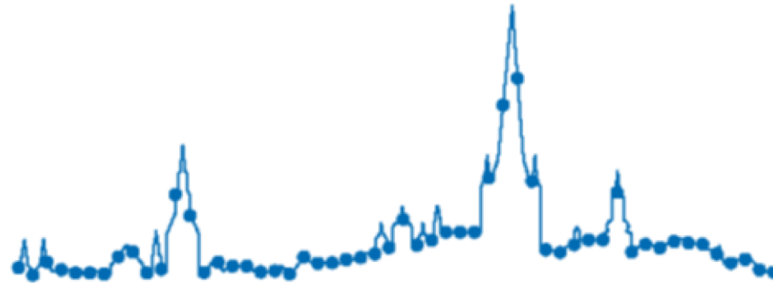
$p_{n+1} = r (p_n - p_n^2)$ , kus  $1 \leq r \leq 4$ .

# Matemaatika TLÜ-s

- Praegu on esindatud n-ö puhas matemaatika ja rakendused signaalitöötluses ning matemaatilises statistikas, ka finants(majandus)matemaatikas.
- Reklaamiks, et meie vilistlased on saanud häid töökohti pankades, liisingufirmades, audiitorfirmades, analüütikutena jne ...
- Tuleviku ideaaliks oleks koostöö DTI-s, nt matemaatikaalase õpitarkvara loomine, inimese ja arvuti interaktsiooni suunal matemaatika „inimlikustamine“ (*math with a human face*) jmt ...

# Viiteid allikatele

- Algvihjend raamatutest (nt Applied Mathematics Entering the 21st Century : invited talks from the ICIAM 2003 Congress / Eds. J. M. Hill and R. Moore, SIAM 2004), teadusartiklitest, Signal Processing konverentsidelt
- <http://www.stanford.edu/~roypea> = Roy Pea, Prof of Education and Learning Sciences, Stanford Uni
- [khanacademy.org/](http://khanacademy.org/)
- [http:// en.wikipedia.org/wiki/Main\\_page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_page) -> **Technology** -> [Search] (MP3, barcode, ...)



# sampling theory and applications 2017

12th International Conference  
Tallinn, Estonia, July 3-7



IEEE  
*Signal Processing Society*



Loodan, et oli kasulik.

Täna !